Fabrizio Gambini

Appunti di matematica e di topologia di base ad uso degli psicoanalisti **3**

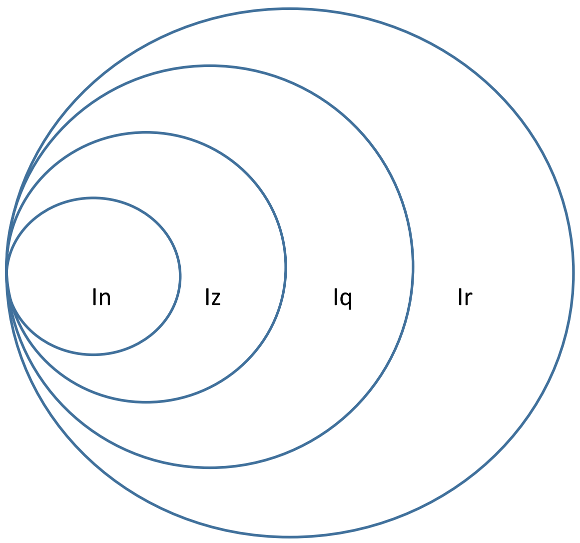
Numero d'oro e numeri irrazionali in generale

Numeri naturali: 5…7…11…897….(In)

Numeri interi relativi -2…-5…-9…-11…-875…(Iz)

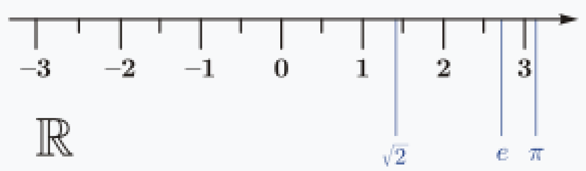
Numeri razionali (+ quoziente tra due interi naturali e/o relativi) 7/23…-896/45…(Iq)

Numeri irrazionali: √2, π, ϕ…(Ir)



Tutti i numeri reali (Ir) sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta reale. Questo significa che i numeri razionali formano un sottoinsieme della retta reale e che ogni numero irrazionale si può ottenere come limite di una successione di numeri razionali.

Più in particolare in matematica i numeri reali possono essere descritti come numeri ai quali è possibile attribuire uno sviluppo decimale finito o infinito.



Rappresentazione della retta reale

I numeri irrazionali inoltre si dividono in irrazionali algebrici (es. numero d'oro) e irrazionali trascendenti (es. π). In matematica un numero trascendente è un numero irrazionale che non è un numero algebrico, ovvero non è un numero ottenibile tramite la soluzione di un'equazione polinomiale. Se un numero *a* è trascendente lo sarà ovviamente anche -*a* e la loro somma è pari a 0, ovvero un numero algebrico. Lo stesso avviene per il prodotto (*a* x *1/a* = 1). In ogni caso l'insieme dei numeri razionali è numerabile (ovvero discontinuo o discreto) come è numerabile l'insieme dei numeri irrazionali algebrici. È invece l'insieme dei numeri irrazionali trascendenti che non è numerabile (l'insieme dei numeri irrazionali trascendenti è un insieme continuo) È basandosi su questi ultimi che Cantor fece la sua dimostrazione basata sulla potenza del continuo.

Esempi di numeri irrazionali e cesura di Dedekind

Dedekind usò la parola ambigua "sezione" (*Schnitt*) nel senso geometrico. Dunque essa è un'intersezione di una linea con un'altra linea che la incrocia, non è un divario. Quando una linea ne incrocia un'altra in geometria, si dice che taglia quella linea. In questo caso, una delle linee è l'asse numerico ed entrambe le linee hanno un punto in comune. In quel punto nell'asse numerico, se non esiste un numero razionale, il matematico colloca o posiziona arbitrariamente un numero irrazionale. Questo porta a posizionare un numero reale in ogni punto del continuum. Questo significa che un infinito è quello discreto rappresentato dai numeri razionali (Iq) + i numeri irrazionali algebrici, ovvero ottenibili tramite la risoluzione di un'equazione polinomiale. Questo infinito incrocia un secondo infinito (vedi esempio successivo, Fig. 1) che taglia il primo ortogonalmente e questo secondo infinito è continuo). Ma, in più rispetto a questo, un numero irrazionale trascendente è posizionabile in ogni punto della retta reale che non sia occupato da un numero razionale o da un numero irrazionale algebrico e questo configura la retta reale sulla quale si posiziona l'insieme Ir come un insieme continuo.

Prendiamo ad esempio la serie di Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34….e dividiamo ogni elemento per quello che lo precede:

1/1=	1
2/1=	2
3/2=	1,5
5/3=	1,6666666….
8/5=	1,6
13/8=	1,625
21/13=	1,615538461538461
34/21=	1,619047661904761

Questi numeri si avvicinano progressivamente all'infinito a un limite, a un numero che indichiamo con ϕ che non è un numero naturale, relativo o un quoziente tra i due. È un numero irrazionale (1,618303….) Nella serie di quozienti desunti dalle serie di Fibonacci ϕ si pone come una cesura verso la quale i numeri razionali convergono all'infinito.

∞ (1,618303…)

1…1,5...1,6...1,615...ϕ...1,619…1,625…2…3…5…8…∞

Fig. 1

Se, sempre partendo dalla serie di Fibonacci operiamo il quoziente tra ogni numero e quello che lo segue otteniamo un altro numero irrazionale che non è ϕ, bensì il numero d'oro, ovvero quello che risolve la ricerca algebrica della sezione aurea. I due numeri entrambi due irrazionali algebrici, dunque ottenibili attraverso un'equazione polinomiale, che sono tra loro in una relazione per la quale, differendo di un'unità, sono l'uno l'inverso dell'altro (vedi risoluzione algebrica della sezione aurea)

1/2=	0,5
2/3=	0,666…
3/5=	0,6
5/8=	0,625
8/13=	0,61538462
13/21=	0,61904762

Questa volta il numero che otteniamo è 0,618303…cioè il numero d'oro.

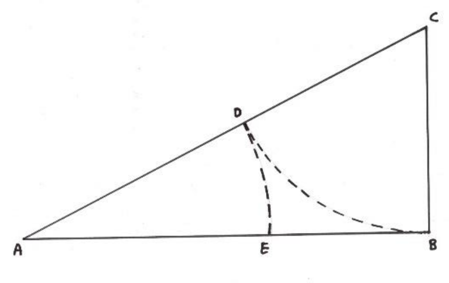
Come sapete, Lacan pone il numero d'oro in relazione all'oggetto *a*, che non è senza esserci; che è poi il modo in cui Lacan riprende la nozione freudiana dell'oggetto perduto.[1] L'oggetto *a* è come la presenza di un numero irrazionale nella serie dei numeri razionali dell'infinito discreto, c'è e non c'è. Come π; c'è, possiamo persino dire che è tra 3 e 4 o tra 3,13 e 3,15 e così via, all'infinito, senza mai però riuscire a sapere dove diavolo sia.

Si capisce bene la situazione se pensiamo alla circonferenza del cerchio che si calcola moltiplicando il diametro (2r) per π. Ora, dentro un cerchio potete inscrivere un triangolo, un quadrato, un pentagono, un esagono, un eptagono e così via, aumentando all'infinito i lati del poligono inscritto nel cerchio fino a che i lati di questo poligono saranno infiniti. È per calcolare il perimetro di questo poligono di un numero infinito di lati che avete bisogno di π, ovvero di un numero irrazionale, infinito, composto da un'infinita serie di decimali che non si ripetono periodicamente. C'è un salto tra il poligono e il cerchio; c'è ma non si sa dove sia. Indica un luogo senza esserci.

L'analogia che Lacan propone è però tra numero d'oro e oggetto *a*.

Cos'è il numero d'oro e cos'è la sezione aurea?

Costruzione geometrica:



BC = AB:2

[1] J. Lacan, *L'identification, Séminaire 1961 – 1962*, lezione del 10 gennaio 1962. Edizione fuori commercio dell'*Association Lacanienne Internationale*.

Si traccia l'ipotenusa AC

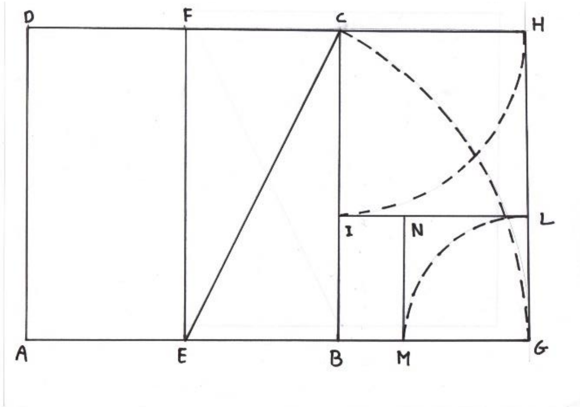
Con un arco di cerchio si proietta B su AC (punto D)

Con un secondo arco di cerchio si proietta D su AB (punto E)

Il punto E definisce la sezione aurea per la quale:

AB : AE = AE : EB

Seconda costruzione geometrica (rettangolo aureo):



In qualche modo questa seconda costruzione ci avvicina al calcolo algebrico della sezione aurea. Vedremo perché.

Dato un quadrato (ABCD) si trova il punto medio di AB (E) e si traccia la perpendicolare EF; si traccia la diagonale EC e si riporta il punto C sul prolungamento del lato AB (G); si traccia la perpendicolare GH e si unisce H con C; si riporta il punto H su CB (I), si traccia il segmento IL e si riporta il punto L su BG (M) e così via all'infinito, producendo rettangoli sempre più piccoli (o sempre più grandi se procedete in senso inverso).

Alla fine AB : BG = HL : LG = MG : MB…

Dove BG = HL e LG = MG…

Inoltre, e questo ci avvicina al calcolo algebrico, se poniamo che ABCD abbia lato 8, CILH avrà lato 5, MGLN avrà lato 3 e così via fino a costituire la serie di Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… Ora, come abbiamo già visto, questa serie numerica, costruita identificando ogni successore attraverso la somma dei due numeri che lo precedono, ha qualche caratteristica aritmetica particolare. Ad esempio quella per la quale, operando il quoziente tra ogni numero e quello che lo segue, otteniamo proprio il nostro numero d'oro: un irrazionale algebrico.

Infatti, se passiamo adesso al calcolo algebrico della sezione aurea abbiamo che

A____________________B____________C

Dove AC : AB = AB : BC

Poniamo AB + BC = 1 e sviluppiamo la proporzione

BC = (AB x AB) : AC

quindi BC = AB^2 : AC

Ma AC = 1, quindi BC = AB^2

Sempre in virtù del fatto che abbiamo posto AB + BC = 1, avremo che BC = 1 – AB e dunque

1 – AB = AB^2, quindi AB^2 + AB – 1 = 0

Che è la forma di un'equazione di secondo grado:

Nella sua forma generale l'equazione di secondo grado si risolve applicando la seguente formula

Per $ax^2 + bx + c = 0$

$X = [-b +/- \sqrt{(b^2-4ac)}] : 2a$

Nel nostro caso l'equazione è $x^2 + x -1=0$

Quindi $x = (-1 +/- \sqrt{1+4}) : 2$ ovvero $x = (-1 +/- \sqrt{5}) : 2$

Come tutte le equazioni di secondo grado ha due soluzioni:

x_1= (-1 + 2,23660679…) : 2 = 0,618303… che è il numero d'oro

e

x_2 = (-1 - 2,23660679…) : 2 = -1,618303… che è negativo e non ci interessa come soluzione ma in sostanza significa che se nel segmento AC il tratto maggiore (AB) è posto pari a 1, allora il lato minore è 0,618303…(che è quello che abbiamo calcolato) mentre se è il segmento minore (BC) a essere posto pari a 1 allora il lato maggiore è 1,618303…che è dunque pari a ϕ ovvero al numero irrazionale che indica la cesura di Dedekind.

Se riprendiamo la lezione[2] che Lacan dedica alla questione vediamo che a lavorare con gli uno, con i significanti dell'infinito discontinuo, ognuno dei quali differisce da ogni altro per il solo fatto di essere diverso, vediamo che la serie di Fibonacci, quella che abbiamo visto "convergere su un valore perfettamente costante ϕ che si chiama limite",[3] prende la forma seguente:

[2] *Ibidem*
[3] *Ibidem*

$$1+\frac{1}{1}=2$$

$$1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{8}{5}$$

1, 2, 3, 5, 8,…e dunque 2/1, 3/2, 5/3, 8/5…..verso il limite della cesura di Dedekind . Dunque, come si vede benissimo dall'operazione impostata da Lacan, è lavorando con gli uno ordinali, con gli uno presi uno per uno, che si verifica l'esistenza dell'infinito continuo nell'infinito discreto. L'oggetto che c'è senza esserci, che non è senza esserci.

Possiamo anche metaforizzare lo stesso concetto attraverso un'altra analogia matematica: si sa che la circonferenza del cerchio è uguale al diametro moltiplicato π, e π è un numero irrazionale, pari a 3,141592653…di cui si possono scrivere le prime 100.000 cifre decimali senza osservare nessuna ripetizione regolare di sequenze numeriche.

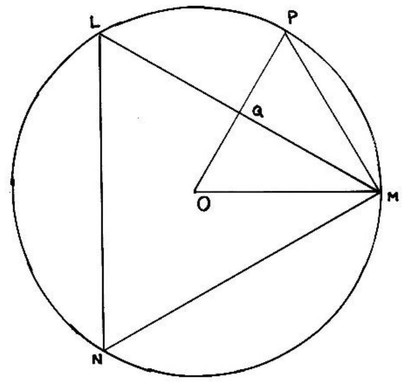
Il fatto per noi interessante è che un cerchio è un poligono con un numero infinito di lati e, se iscriviamo in un cerchio di raggio dato (poniamolo uguale a 6 cm), una serie di poligoni regolari, osserviamo che se il poligono iscritto è un triangolo equilatero, il suo perimetro sarà uguale a 30 cm, per un quadrato sarà 33,9, per un pentagono 35,26, per un esagono 36, per un ottagono 36,74, per un decagono 37. Come si vede tutti numeri che si avvicinano progressivamente alla circonferenza del cerchio (37,68) senza mai raggiungerne il valore. Inversamente, se dividiamo i perimetri dei poligoni per il valore pari al doppio del raggio del cerchio in cui sono iscritti otteniamo una serie di valori (2,5; 2,82; 2,93; 3; 3,06; 3,08) che si avvicinano progressivamente a π senza mai raggiungerlo.

n° lati	r	perimetro/circonferenza	Valori numerici
3	6	31,176	2,598
4	6	33,9	2,82
5	6	35,26	2,93
6	6	36	3
8	6	36,74	3,06
10	6	37	3,08
∞	6	37,68	π

Vedete che anche qui abbiamo a che fare con due infiniti:

1. l'infinito dei valori numerici che salgono progressivamente da 2,5 a π e che è un infinito discreto, fatto cioè da una serie infinita di numeri ognuno dei quali è separato da quello che lo precede e che lo segue da un intervallo e
2. l'infinito di π che è un valore continuo, un singolo numero irrazionale, in sé infinito + un "secondo" infinito continuo che è quello di tutti i numeri irrazionali trascendenti che si possono posizionare sulla retta numerica reale in ogni punto non occupato da un numero razionale o da un numero irrazionale algebrico.

Ovviamente anche di questo è possibile una scrittura geometrica piuttosto che numerica:



che, nel caso di un triangolo equilatero iscritto in una circonferenza di raggio 6 è la seguente: sia OM=6, centrando il compasso in M si riporta sulla circonferenza il punto O creandosi l'intersezione P, facendo la stessa operazione dopo aver puntato il compasso in P si determina l'intersezione L. Da L si traccia la linea parallela all'asse verticale della circonferenza che incontra la circonferenza nel punto N. Si traccia a questo punto il segmento NM e otteniamo un triangolo equilatero iscritto nella circonferenza di raggio 6. Per calcolare il valore numerico del lato del triangolo ottenuto si traccia il triangolo OMP ottenuto unendo il punto P con il centro O della circonferenza. Il segmento OP è perpendicolare al segmento LM e lo incontra in un punto Q che è quello medio tra L e M. Poiché la somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa, avremo che $QM^2 + QP^2$ è uguale a PM^2, dunque QM^2 è uguale a $PM^2 – PQ^2$. Poiché

abbiamo posto PM = 6 e PQ = PM/2 avremo che $QM^2 = 36 – 9 = 27$ e dunque $QM = \sqrt{27} = 5,196$. LM è uguale a QM x 2 = 10,392. Il perimetro che cerchiamo è dunque 10,392 x 3 = 31,176.
Con la formula matematica abbiamo che $l=R\sqrt{3}$. Nel nostro caso $l = 6\sqrt{3} = 6x1,732 = 10,392$.

Procedendo con triangoli sempre più piccoli si nota come cambi il perimetro di un poligono inscritto in una circonferenza quando si raddoppia il numero dei lati iniziando dal triangolo equilatero e ottenendosi così una successione di cui π è il limite.