Fabrizio Gambini

Appunti di matematica e di topologia base ad uso degli psicoanalisti **2**

Cantor

Università di Halle, fine del XIX secolo.

I numeri sulla *retta reale* comprendono i *numeri razionali* (interi e quozienti di interi) e quelli *irrazionali* (come π che non può essere espresso da un quoziente di numeri interi).
I *numeri irrazionali* hanno espansioni decimali infinite e non periodiche. Si può dimostrare che i decimali che si ripetono (0.4848484848…) sono sempre uguali a un *numero razionale*, ovvero possono sempre essere scritti come rapporti di due numeri interi (nell'esempio 16/33). Al contrario i decimali non periodici (ad esempio π ovvero 3,14159….) non sono mai razionali, ovvero non possono mai essere scritti come il rapporto tra due numeri interi.
Cantor aveva mostrato che il continuo di numeri tra due numeri qualsiasi della retta numerica deve essere 2^n elementi se ci sono n interi. Se n è infinito, come sono infiniti i numeri interi sulla retta numerica, il continuo dei numeri è uguale a 2 elevato a una potenza infinita venendosi così a creare un infinito esponenzialmente più ampio del primo. Cantor quindi aveva dimostrato che l'ordine di infinito dei *numeri reali* (*numeri razionali* + *numeri irrazionali*) è più alto dell'infinito dei numeri razionali soltanto o di quello dei numeri interi.

L'operazione di esponenziazione è l'unica operazione aritmetica che conosciamo in grado di portare una quantità infinita da un livello a un livello più alto di infinito. L'esponenziazione è essenzialmente un'operazione per ottenere la potenza di un insieme (l'insieme di tutti i sottoinsiemi di un dato insieme). Questa è una delle ragioni per cui il paradosso di Russell è veramente tale: non possiamo trovare un insieme totale poiché nessun insieme può contenere il suo stesso insieme potenza. Facciamo un esempio: un insieme contenente soltanto due distinti elementi. Chiamiamo questo insieme *x* e i suoi elementi *a* e *b*. Ora, l'insieme potenziato dell'insieme *x* con solo due elementi, *a* e *b*, è l'insieme contenente tutti i sottoinsiemi di *x*. Pertanto è l'insieme che contiene: 0 (l'insieme vuoto), *a*, *b* e (*a*,*b*); tutti sottoinsiemi di x. Constatiamo che l'insieme potenza è sempre più ampio dell'insieme di partenza (che contiene solo *a* e *b*) avendo 2^n elementi dove *n* rappresenta il numero di elementi dell'insieme originale. Nel nostro esempio di *x* contente *a* e *b* il suo insieme potenza è 2^2 ovvero 4.