Fabrizio Gambini

Appunti di matematica e di topologia base ad uso degli psicoanalisti ***1***

Gödel

Nel 1928, in occasione del Congresso Matematico di Bologna, Hilbert lancia una sorta di sfida:

> *dimostrare tutte le verità matematiche attraverso lo sviluppo di una cornice puramente sintattica in cui iscrivere tutta la matematica.*

Nota: cosa è semantico e cosa è sintattico in matematica?

Aneddoto di Gauss.

Durante un'ora di lezione la classe della scuola elementare dove si trovava Gauss bambino faceva un po' di confusione. Il maestro, per punire la classe e fare stare i bambini un po' tranquilli, dà un compito: sommare tra loro tutti i numeri interi compresi tra 1 e 100. Dopo meno di un minuto il piccolo Gauss consegna un foglietto con la soluzione (5050). Il maestro esterrefatto chiede: "Ma come hai fatto?" e Gauss gli spiega:
scriviamo due serie di numeri una ascendente e una discendente

1	2	3	4	5	6	…50
100	99	98	97	96	95	…51

La somma di ogni coppia è 101 (100+1, 99+2, …) e sono 50 coppie dunque 50 x 101 = 5050. Semplice, no?
Il punto che ci interessa di quest'aneddoto è il fatto che il trucco inventato da Gauss bambini avrebbe funzionato per qualunque numero fosse stato scelto dal maestro:

Dato un numero n, si separano gli interi da 1 a n in due gruppi di grandezza uguale (introducendo 0 se n è un numero dispari). La somma dei numeri sarà sempre uguale alla metà dei numeri moltiplicata per la quantità dei numeri + 1.

$(n : 2) \times (n + 1) = x$

Nel caso particolare dell'aneddoto $(100 : 2) \times (100 + 1) = 50 \times 101 = 5050$
In sostanza possiamo dire che n introduce un elemento sintattico nella semantica dei numeri (1 + 2 + 3+ 4 + 5….)

Nel programma di Hilbert si trattava di costruire un dizionario che assegnasse un significato (ovvero un valore semantico) alle stringhe astratte, puramente sintattiche, formate dai simboli del sistema formale. Il suo argomento in favore della formalizzazione era la tesi secondo la quale i paradossi scaturivano dal contenuto semantico delle loro espressioni nel linguaggio naturale.

Esempio
Paradosso 1:
A Siviglia, Figaro rade tutti quelli che non si radono da soli. Chi rade Figaro?
Paradosso 2
Questo enunciato è falso

Cosa fa Gödel?

1. Trova un modo di rappresentare tutte le asserzioni su relazioni tra numeri naturali, usando questi stessi numeri. Poi prende i Principia Mathematica di Russel e Whitehead e traduce in numeri (numerazione di Gödel) i simboli logici elementari introdotti dal testo di Russel e Whitehead. Prendiamone 10 a titolo di esempio:

-	non	1
V	oppure	2
Ɔ	se…allora	3
Ǝ	esiste	4
=	è uguale a	5
0	zero	6
$	il successore immediato di	7
(	punteggiatura	8
)	punteggiatura	9
,	punteggiatura	10

A questo seguono una serie di operazioni attraverso le quali ogni singola formula del Trattato di Russel e Whitehead viene indicata in modo non ambiguo attraverso un singolo numero.

Es. (Ǝx) (x=$y) che si legge: Esiste un numero x che è il successore immediato del numero y.

Il numero di Gödel che indica la proposizione si ottiene indicando ognuno degli elementi della formula con un numero primo partendo dal primo e progredendo verso il successivo. Procedendo con i dieci elemento della formula otteniamo:

(	2
Ǝ	3
x	5
)	7
(	11
x	13
=	17
$	19
y	23
)	29

A questo punto si moltiplicano tra loro i numeri primi dopo che ognuno è stato elevato alla potenza uguale al numero di Gödel dell'elemento corrispondente della formula:

$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9$

Mediante questo schema Gödel fu in grado di associare un numero unico a ciascuna asserzione e a ciascuna sequenza di asserzioni dell'aritmetica che potessero essere espresse nel linguaggio dei Principia Mathematica.

La seconda operazione di Gödel è quella di rimpiazzare la nozione di verità che è alla radice del paradosso (Esempio paradosso 2) con la nozione di dimostrabilità. Quindi "Questo enunciato è falso" diventa "Questa asserzione non è dimostrabile". Ora, se l'osservazione è dimostrabile, allora è vera; dunque ciò che dice deve essere vero e dunque non è dimostrabile. Questo significa che l'asserzione e la sua negazione sono entrambe dimostrabili, il che implica un'incoerenza. In sostanza Gödel dimostrò che per qualunque sistema formale abbastanza potente da esprimere tutte le proposizioni dell'aritmetica ordinaria, deve esistere un simile enunciato di Gödel; di conseguenza la formalizzazione deve essere incompleta. Questo significa che per ogni sistema coerente abbastanza potente da esprimere tutte le relazioni fra i numeri interi, esiste un'asserzione che non può essere dimostrata usando la regola del sistema. Inoltre Gödel mostrò anche, quasi come un'osservazione collaterale, in che modo costruire un'asserzione aritmetica A, che si traduca nell'asserzione matematica "L'aritmetica è coerente". Dimostrò poi che A non è dimostrabile, il che implica che la coerenza dell'aritmetica non possa essere stabilita mediante alcun sistema formale che rappresenti l'aritmetica stessa.

Teorema di Gödel: **Per ogni sistema formale coerente F che si proponga di decidere – cioè di dimostrare o refutare - tutte le asserzioni dell'aritmetica, esiste una proposizione dell'aritmetica, che non può essere né dimostrata né refutata all'interno del sistema stesso.**